2次元ローレンツ空間のJames定数についての最近の発展 (関数空間の構造とその周辺)

斎藤, 吉助; 田中, 亮太朗; 三谷, 健一

数理解析研究所講究録
第2041巻 2017年 77-83

2次元ローレンツ空間のJames定数についての最近の発展

斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)
田中 亮太朗 (Ryotaro Tanaka)
三谷 健一 (Ken-Ichi Mitani)

1 Introduction

バナッハ空間の幾何学的構造の研究は, 非線形解析学や近似理論などの多くの分野において応用され, 重要な研究対象を与えている. 端的に言えば, その研究は単位球の形状の研究であり, 丸さや非真四角さを表す概念を研究することである. その度合いを表すものとして, 多くの定数が定義されている. その代表的なものとして, von Neumann-Jordan 定数と James 定数が挙げられる. 本論文では, 特に, 2 次元実ノルム空間の James 定数に関する研究の発展について述べる.

X をバナッハ空間とし, S_X をその単位球面とする. すなわち, $S_X=\{x\in X:\|x\|=1\}$. James 定数は, Gao-Lau [2] によって, 次のように定義された.

$$J(X)=\sup\{\min\{\|x+y\|,\|x-y\|\}:x,y\in S_X\}.$$

$J(X)$ の基本的な性質としては次が挙げられる.

(i) $\sqrt{2}\leq J(X)\leq 2$ ([2]).

(ii) H がヒルベルト空間ならば, $J(H)=\sqrt{2}$.

(iii) $\dim X\geq 3$ のとき, $J(X)=\sqrt{2}$ であることと X がヒルベルト空間であることとは同値である. $\dim X=2$ のときは, $J(X)=\sqrt{2}$ を満たすノルム空間は無数にある ([2, 5, 6, 7]).

(iv) $J(X)<2$ のとき, またそのときに限って, X は uniformly non-square である. ここで X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta>0$ が存在して, すべての $x,y\in S_X$ に対して

$$\min\{\|x+y\|,\|x-y\|\}\leq 2(1-\delta)$$

が成立することをいう.

(v) $J(X^*)\neq J(X)$ となるようなバナッハ空間 X が存在する, ここで X^* は X の双対空間を表す ([4]).

ヒルベルト空間以外の具体的なバナッハ空間に対しては, Gao-Lau [2] が, Clarkson の不等式を用いて L_p 空間の James 定数を次のように計算している. $1 \le p \le \infty$, $1/p + 1/q = 1$ のとき,

$$J(L_p) = J(\ell_p) = \max\{2^{1/p}, 2^{1/q}\}.$$

しかし, 一般に James 定数の正確な値を求めることは非常に困難であり, 2 次元空間においてもその計算は容易ではない.

本論文では, 特に, James 定数の計算手法についての発展, 及びそれらを応用することで得られる近年の結果について述べる.

2 James constant of two-dimensional Lorentz sequence spaces

James 定数の具体的な計算結果として, Kato-Maligranda [3] は 2001 年, 2 次元ローレンツ空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ の James 定数を部分的に計算した. ここで, $d^{(2)}(\omega, q)$ とは, $1 \le q < \infty$ 及び $0 < \omega < 1$ に対して,

$$\|(a, b)\|_{\omega,q} = (\max\{|a|^q, |b|^q\} + \omega \min\{|a|^q, |b|^q\})^{1/q}$$

により定まるノルムを備えた $\mathbb{R}^2$ である. 定義は 2 次元の ℓ_p-ノルムに近いものの, 当時はこのような空間においてさえ James 定数の計算は困難であった.

Theorem 2.1 (Kato and Maligranda [3]). *Let* $q \ge 2$ *and* $0 < \omega < 1$. *Then*

$$J(d^{(2)}(\omega, q)) = 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

さらに彼らは, 次の問題を提起した.

(1) Let $1 \le q < 2$. What is the James constant of $d^{(2)}(\omega, q)$?

(2) What is the norm of the dual space $d^{(2)}(\omega, q)^*$ of $d^{(2)}(\omega, q)$?

(3) Compute the James constant of $d^{(2)}(\omega, q)^*$.

一方, 2003 年には Mitani-Saito [9] が, symmetric absolute normalized norms と呼ばれる $\mathbb{R}^2$ 上の特殊なノルムに対して James 定数の計算公式を与えた. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ に対して,

- 各 (a, b) に対して $\|(a, b)\| = \|(b, a)\|$ のとき symmetric,
- 各 (a, b) に対して $\|(a, b)\| = \|(|a|, |b|)\|$ のとき absolute,
- $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$ のとき normalized

とそれぞれいう.

$$\begin{aligned} AN_2 &= \{\|\cdot\| : \text{absolute normalized norm on } \mathbb{R}^2\} \\ AN_2^S &= \{\|\cdot\| \in AN_2 : \text{symmetric norm on } \mathbb{R}^2\} \\ \Psi_2 &= \{\psi : \text{convex function on } [0,1] \text{ with } \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1\} \\ \Psi_2^S &= \{\psi \in \Psi_2 : \psi(1-t) = \psi(t) \text{ for each } t\} \end{aligned}$$

とし, $\psi \in \Psi_2$ に対して

$$\|(a,b)\|_\psi = \begin{cases} (|a|+|b|)\psi\left(\dfrac{|b|}{|a|+|b|}\right) & ((a,b) \neq (0,0)) \\ 0 & ((a,b) = (0,0)) \end{cases}$$

とすると, $\psi \mapsto \|\cdot\|_\psi$ は Ψ_2 から AN_2, 及び Ψ_2^S から AN_2^S への全単射となる ([1, 13]). すなわち, $\mathbb{R}^2$ 上の (symmetric) absolute norms は特殊な凸関数の族と一対一に対応している. James 定数の研究において, 凸関数の性質を通してノルムの性質が調べられるこの対応関係は非常に有用である.

Theorem 2.2 (Mitani and Saito [9]). *Let* $\psi \in \Psi_2^S$. *Then*

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)) = \max_{0 \leq t \leq 1/2} \frac{2-2t}{\psi(t)} \psi\left(\frac{1}{2-2t}\right).$$

この公式を用いることで, 様々な具体例の計算が可能になった. 例えば, $1/2 \leq \beta \leq 1$ とし, $\psi_\beta(t) = \max\{1-t, t, \beta\}$ とすると $\psi_\beta \in \Psi_2^S$ で,

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi_\beta})) = \begin{cases} 1/\beta & (1/2 \leq \beta \leq 1/\sqrt{2}) \\ 2\beta & (1/\sqrt{2} \leq \beta \leq 1) \end{cases}.$$

さらに, 実は先述の 2 次元ローレンツ空間 $d^{(2)}(\omega, q)$ のノルム $\|\cdot\|_{\omega,q}$ も symmetric absolute normalized norm であることがわかる. この事実と上の公式を用いることで, Mitani-Saito-Suzuki [11] は次の結果を得た.

Theorem 2.3 (Mitani, Saito and Suzuki [11]). *Let* $1 \leq q < 2$. *If* $0 < \omega \leq (\sqrt{2}-1)^{2-q}$, *then*

$$J(d^{(2)}(\omega, q)) = 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

If $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega < 1$, *then there exists a unique pair of real numbers* s_0, s_1 *such that*

$$\left(\frac{1-\omega}{\omega(1+\omega)}\right)^{p-1} < s_0 < \omega^{1/(2-q)} < s_1 < 1$$

and

$$(1+s_i)^{q-1}(1-\omega s_i^{q-1}) = \omega(1-s_i)^{q-1}(1+\omega s_i^{q-1})$$

for $i = 0, 1$.

(i) *If* $(\sqrt{2}-1)^{2-q} < \omega < \sqrt{2}^q - 1$*, then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)) = \max\left\{\left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q}, 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}\right\}.$$

(ii) *If* $\sqrt{2}^q - 1 < \omega < 1$*, then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)) = \left(\frac{2(1+s_0)^{q-1}}{1+\omega s_0^{q-1}}\right)^{1/q}.$$

これは, Kato-Maligranda の問題 (1) への解答を与える.

3 Dual of two-dimensional Lorentz sequence spaces

Kato-Maligranda の問題 (2), (3) を解くためには, 次の結果が有用である.

Proposition 3.1 (Mitani and Saito [10]). *Let* $\psi \in \Psi_2$*. Then the formula*

$$\psi^*(t) = \max_{0\le s\le 1} \frac{(1-s)(1-t)+st}{\psi(s)}$$

defines an element ψ^* *of* Ψ_2*, and* $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\psi)^* = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_{\psi^*})$*, where the correspondence is given by a natural manner.*

$d^{(2)}(\omega,q)$ のノルムに対応する関数 $\psi_{\omega,q} \in \Psi_2^S$ は次のようになる.

$$\psi_{\omega,q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^q + \omega t^q)^{1/q} & (0 \le t \le 1/2) \\ (t^q + \omega(1-t)^q)^{1/q} & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}.$$

この関数に対して dual function $\psi^*_{\omega,q}$ を計算することで, 次を得る.

Theorem 3.2 (Mitani and Saito [10]). *Let* $1 < q < \infty$ *and* $0 < \omega < 1$*. Then*

$$\psi^*_{\omega,q}(t) = \begin{cases} ((1-t)^p + \omega^{1-p}t^p)^{1/p} & (0 \le t < \omega/(1+\omega)) \\ (1+\omega)^{1/p-1} & (\omega/(1+\omega) \le t < 1/(1+\omega)) \\ (t^p + \omega^{1-p}(1-t)^p)^{1/p} & (1/(1+\omega) \le t \le 1) \end{cases},$$

where $1/p + 1/q = 1$*.*

この $\psi^*_{\omega,q} \in \Psi_2^S$ からノルムを再構成することで, 問題 (2) への解答を得る.

Theorem 3.3 (Mitani and Saito [10]). *Let* $1 < q < \infty$ *and* $0 < \omega < 1$*. Then*

$$\|(a,b)\|^*_{\omega,q} = \begin{cases} (|a|^p + \omega^{1-p}|b|^p)^{1/p} & (|b| \le \omega|a|) \\ (1+\omega)^{1/p-1}(|a|+|b|) & (\omega|a| \le |b| \le \omega^{-1}|a|) \\ (\omega^{1-p}|a|^p + |b|^p)^{1/p} & (\omega^{-1}|a| \le |b|) \end{cases},$$

where $1/p + 1/q = 1$*.*

また, $d^{(2)}(\omega,q)$ の場合と同様に, $\psi^*_{\omega,q}$ に対して Theorem 2.2 を用いることで, 問題 (3) への解答を得る.

Theorem 3.4 (Mitani and Saito [10]). *Let $q \geq 2$ and $0<\omega<1$. Then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)^*) = 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

Theorem 3.5 (Mitani and Saito [10]). *Let $1 \leq q < 2$ and $1/p+1/q=1$. If $0<\omega\leq (\sqrt{2}-1)^{2-q}$, then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)^*) = 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}.$$

If $(\sqrt{2}-1)^{2-q}<\omega<1$, then there exists a unique pair of real numbers s_0^*, s_1^* such that

$$\frac{1-\omega}{1+\omega} < s_0^* < \omega^{1/(2-q)} < s_1^* < \omega$$

and

$$(1+s_i^*)^{p-1}(1-\omega^{1-p}(s_i^*)^{p-1}) = \omega^{1-p}(1-s_i^*)^{p-1}(1+\omega^{1-p}(s_i^*)^{p-1})$$

for $i=0,1$.

(i) *If $(\sqrt{2}-1)^{2-q}<\omega<\sqrt{2}^q-1$, then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)^*) = \max\left\{\left(\frac{2(1+s_1^*)^{p-1}}{1+\omega^{1-p}(s_1^*)^{p-1}}\right)^{1/p}, 2\left(\frac{\omega}{1+\omega}\right)^{1/q}\right\}.$$

(ii) *If $\sqrt{2}^q-1<\omega<1$, then*

$$J(d^{(2)}(\omega,q)^*) = \left(\frac{2(1+s_1^*)^{p-1}}{1+\omega^{1-p}(s_1^*)^{p-1}}\right)^{1/p}.$$

4 Duality of James constant

導入部でも述べたように, 等式 $J(X^*)=J(X)$ は, $X=L_p$ などの特殊な場合には成立するものの, 一般には成立しないことが知られている. またいつ成立するのかについても, ほとんどわかっていなかった. このことは, 2 次元ローレンツ空間 $d^{(2)}(\omega,q)$ の場合についても同様で, $q\geq 2$ や $1<q<2$ で $0<\omega\leq(\sqrt{2}-1)^{2-q}$ のときを除いては, $J(d^{(2)}(\omega,q)^*)=J(d^{(2)}(\omega,q))$ が成立するか否かは定かではなかった. しかし最近, Mitani-Saito-Tanaka [12] において, 次のことが分かった.

Theorem 4.1 (Mitani, Saito and Tanaka [12]). *Let $1<q<\infty$ and $0<\omega<1$. Then $J(d^{(2)}(\omega,q)^*)=J(d^{(2)}(\omega,q))$.*

これより, ℓ_p-ノルム以外にも, $J(X^*)=J(X)$ を満たすノルムが数多く存在することが分かる. また, Theorem 4.1 から, 同様の結果が symmetric absolute norms on $\mathbb{R}^2$ に対しても成立すると予想し, それを証明した ([14]).

Theorem 4.2 (Saito, Sato and Tanaka [14]). *Let* $\|\cdot\|$ *be a symmetric absolute norm on* $\mathbb{R}^2$. *Then* $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)^*) = J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$.

この結果により, $J(X^*) = J(X)$ となるための簡潔な十分条件を得たが, $\pi/2$-回転不変ノルムの概念を用いることで, さほど時を置かず更なる拡張が Komuro-Saito-Tanaka [8] によりなされた. $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が $\pi/2$-回転不変であるとは, 各 (a, b) に対して $\|(a, b)\| = \|(-b, a)\|$ が成立することをいう. 容易にわかるように, symmetric absolute norms on $\mathbb{R}^2$ は $\pi/2$-回転不変である.

上述の結果は次の定理から従う.

Theorem 4.3 (Komuro, Saito and Tanaka [8]). *Let* $\|\cdot\|$ *be a* $\pi/2$*-rotation invariant norm on* $\mathbb{R}^2$. *Then*

$$J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)) = \sqrt{2}\|R(\pi/4)\|,$$

where $\|R(\pi/4)\|$ *is the operator norm of the* $\pi/4$*-rotation matrix*

$$R(\pi/4) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Corollary 4.4. *Let* $\|\cdot\|$ *be a* $\pi/2$*-rotation invariant norm on* $\mathbb{R}^2$. *Then* $J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)^*) = J((\mathbb{R}^2, \|\cdot\|))$.

参考文献

[1] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[2] J. Gao and K.-S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A, **48** (1990), 101–112.

[3] M. Kato and L. Maligranda, *On James and Jordan-von Neumann constants of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., **258** (2001), 457–465.

[4] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math., **144** (2001), 275–295.

[5] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$, Math. Nachr., **289** (2016), 1005–1020.

[6] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$*: Part II*, Mediterr. J. Math., **13** (2016), 4039–4061.

[7] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the class of Banach spaces with James constant* $\sqrt{2}$ *III*, to appear in Math. Inequal. Appl.

[8] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, *A sufficient condition that* $J(X^*) = J(X)$ *holds for a Banach spaces* X, to appear in Tokyo J. Math.

[9] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *The James constant of absolute norms on* $\mathbb{R}^2$, J. Nonlinear Convex Anal., **4** (2003), 399–410.

[10] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, *Dual of two-dimensional Lorentz sequence spaces*, Nonlinear Anal., **71** (2009), 5238–5247.

[11] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, *On the calculation of the James constant of Lorentz sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., **343** (2008), 310–314.

[12] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On the James constants of two-dimensional Lorentz sequence spaces and its dual*, J. Nonlinear Convex Anal., **16** (2015), 2269–2277.

[13] K.-S. Saito, M, Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.

[14] K.-S. Saito, M. Sato and R. Tanaka, *When does the equality* $J(X^*) = J(X)$ *hold for a two dimensional Banach space* X*?*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.), **31** (2015), 1303–1314.

Kichi-Suke Saito
Department of Mathematical Sciences,
Institute of Science and Technology,
Niigata University,
Niigata 950-2181, Japan
E-mail: saito@math.sc.niigata-u.ac.jp

Ryotaro Tanaka
Faculty of Mathematics,
Kyushu University,
Fukuoka 819-0395, Japan
E-mail: r-tanaka@math.kyushu-u.ac.jp

Ken-Ichi Mitani
Department of Information and Communication Engineering
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University
Okayama, 719-1197, Japan
E-mail: mitani@cse.oka-pu.ac.jp